Chapitre 1

La théorie du comportement du consommateur

1. La théorie du comportement du consommateur

1.1 Présentation générale du problème du consommateur

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$ un complexe (vecteur) de ℓ biens ; chaque composante x_h du vecteur représente la consommation en bien h.

> «Le consommateur choisit le **meilleur complexe** x dans un ensemble de complexes qui sont à priori **possibles** pour lui[1].»

Il faut d'abord définir quels sont les complexes possibles et ensuite dire ce que signifie le meilleur complexe x.

Le consommateur est soumis à une contrainte physique et à une contrainte économique.

Contrainte physique

Soit X l'ensemble des complexes possibles (ou l'ensemble des consommations possibles).

La contrainte s'écrit $x \varepsilon X$ où X est donné à priori et représente les contraintes physiques qui sont imposées au consommateur. X peut être défini de plusieurs façons, par exemple :

$X = R_+^l$ $x \varepsilon X$ implique que toutes les composantes de x sont non négatives ($x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$). Dans ce cas, le consommateur n'offre rien.

[1] Malinvaud, E., Leçons de théorie microéconomique, 4ème éd., Dunod, Paris, 1982, (p. 12).

$X \subset R_+^\ell$ certains vecteurs sont exclus de l'ensemble, par exemple pour représenter le fait qu'on assure les besoins élémentaires (minimum vital).$X \subseteq R^2$ on peut admettre certaines composantes négatives représentant le travail, par exemple.

Contrainte économique (ou contrainte institutionnelle)

Le consommateur dispose du revenu R et fait face au vecteur de prix p ($p = (p_1, p_2, \ldots, p_\ell)$ et $p_h > 0$, $(h = 1, \ldots, \ell)$

La contrainte s'écrit : $p'x = \sum_{h=1}^{\ell} p_h * x_h \leq R$, où R et p sont des données exogènes.

Meilleur complexe

Le choix du meilleur complexe dépend des préférences de l'individu. Ses préférences sont représentées par une **fonction d'utilité :**

$$u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$$

qu'il cherche à **maximiser**.

Soit x^1 et x^2 deux complexes de biens. $u(x^1) > u(x^2)$ signifie que le consommateur préfère x^1 à x^2.

Équilibre du consommateur

Un équilibre du consommateur est un vecteur x^0 qui maximise l'utilité u(x) sous les contraintes physiques et économiques.

Données exogènes : u, X, R, p

Var. endogènes : $x_h (h = 1, \ldots, \ell)$

Le vecteur x^0 dépend de u, X, p et R. Si x^0 est unique, on peut écrire : $x^0 = \xi(p, R)$

c'est-à-dire : $x_1 = \xi_1(p_1, p_2, \ldots, p_\ell, R)$

$$x_2 = \xi_2(p_1, p_2, \ldots, p_\ell, R)$$

$$\vdots$$

$$x_h = \xi_h(p_1, p_2, \ldots, p_\ell, R)$$

où ξ_h est la fonction de demande du consommateur pour le bien h, laquelle fonction dépend des prix et de son revenu.

1.2 La représentation des préférences

Parmi l'ensemble X des consommations possibles, le consommateur choisit des complexes de biens selon ses préférences. On peut représenter ces préférences de deux façons :

- soit par un préordre de préférences (relation de préférence) ;
- soit par une fonction d'utilité (u(x)).

Nous verrons que sous certaines hypothèses, il est équivalent de travailler avec l'une ou l'autre de ces représentations.

La théorie des préférences

Définition : Soit «$\succ$» la relation qui est définie entre les x de X.

1) $x^1 \geq x^2$ signifie que x^1 est préféré à x^2. C'est la relation de préférence faible. Le consommateur pense que x^1 est au moins aussi bon que x^2.
(en termes d'utilité : $u(x^1) \geq u(x^2)$).
2) $x^1 \succ x^2$ signifie que x^1 est préféré à x^2. C'est la relation de préférence forte ; $x^1 \succ x^2$ si $x^1 \geq x^2$ mais non $x^2 \geq x^1$. (en termes d'utilité : $u(x^1) > u(x^2)$).
3) $x^1 \sim x^2$ signifie que le consommateur est indifférent entre x^1 et x^2. C'est la relation d'indifférence ; $x^1 \sim x^2$ si $x^1 \succ x^2$ et $x^2 \succ x^1$. (en termes d'utilité : $u(x^1) = u(x^2)$).

Si on veut que les x de l'ensemble X soient ordonnés par la relation «$\succ$», cette relation doit respecter certaines exigences.

1.2.1 Axiomes de la théorie des préférences

A.1 (Ordre total) Pour tout couple x^1, $x^2 \in X$, ou bien $x^1 \geq x^2$ ou bien $x^2 \geq x^1$. Tous les complexes de biens peuvent être comparés entre eux.

A.2 (Réflexivité) Pour tout $x \in X$, $x \geq x$

A.3 (Transitivité) Si $x^1 \geq x^2$ et si $x^2 \geq x^3$ alors $x^1 \geq x^3$. Cet axiome nous assure qu'il y a un meilleur élément dans l'ensemble, ce qui est nécessaire pour les problèmes de maximisation.

Les axiomes A.1, A.2 et A.3 définissent un préordre sur X

1.2.2 Lien entre le préordre et u

A.4 Pour tout $x^0 \in X$

$(x \in X \mid x^0 \geq x)$ l'ensemble de tous les x qui ne sont pas préférés à x^0 et

$(x \in X \mid x \geq x^0)$ l'ensemble de tous les x auxquels x^0 n'est pas préféré ;

sont fermés dans X

L'axiome A.4 nous assure qu'il n'y ait pas de discontinuité dans les choix du consommateur : intuitivement, si x^1 est préféré à x^2 et que x^3 est «très près» de x^1, alors x^3 est aussi préféré à x^2.

Remarques

- Imposer les hypothèses sur u est équivalent à imposer des axiomes sur «$\geq$».

- On peut tout aussi bien construire la théorie du consommateur à partir de u qu'à partir de «≥». En général, il est plus simple de la faire à partir de u.

Proposition

En autant que X satisfait à certaines conditions générales très peu restrictives, on peut représenter tout préordre (c'est-à-dire une relation «≥» qui satisfait à A.1, A.2 et A.3) qui satisfait à A.4, par une fonction d'utilité continue. **Il n'est donc pas plus restrictif de travailler avec u que de travailler avec «≥».**

1.3 La théorie de l'utilité

La fonction d'utilité est la deuxième façon de représenter les préférences des consommateurs. Elle aide à classer les différents complexes x suivant l'ordre dans lequel le consommateur les choisit.

Le mot «utilité» peut porter à confusion : la théorie de l'utilité ne représente pas une théorie psychologique ou philosophique particulière. C'est une théorie logique qui s'applique quelles que soient les motivations du consommateur. Par ailleurs, pour l'économiste, u est une donnée et on ne s'intéresse pas à sa provenance.

La «valeur numérique» donnée par u au complexe x n'a aucun sens en soi. Elle n'est utile que dans la mesure où elle permet d'évaluer les préférences du consommateur par rapport aux différents complexes de biens.

Supposons, par exemple, que l'utilité d'un consommateur soit $u(x_1, x_2) = x_1x_2$. Si $x_1 = x_2 = 2$, alors $u(x_1, x_2) = 4$. Nous savons alors que la valeur accordée par ce consommateur au complexe de bien (2, 2) est de 4, ce qui ne signifie rien en soi. Cependant, si $x_1' = x_2' = 3$, alors $u\left(x_1', x_2'\right) = 9$, ce qui nous permet de dire que le consommateur préfère le complexe (3, 3) au complexe (2, 2) puisque $u(3, 3) = 9 > u(2, 2) = 4$.

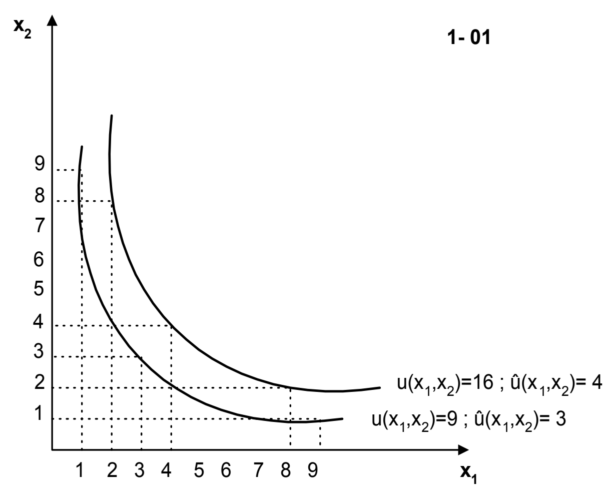
La surface d'indifférence associée à x^0 est l'ensemble de tous les complexes x tels que u(x) = $u(x^0)$.

Exemple

Soit $u(x_1, x_2) = x_1x_2$. Posons $x^0 = (3, 3)$. La courbe d'indifférence associée à x^0 est alors l'ensemble de tous les couples (x_1, x_2) pour lesquels $u(x_1, x_2) = x_1x_2 = 9$.

Soit la fonction $\hat{u}(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$. En fait, $\hat{u}(x)=\phi(u(x))$, où $\phi(u)=u^{\frac{1}{2}}$. De plus, $\phi'(u)=\frac{1}{2}\, u^{-\frac{1}{2}} >0$. Donc, $\hat{u}(x)$ est une transformation croissante de u(x).

Les fonctions $\hat{u}(x)$ et u(x) ont les mêmes courbes d'indifférence. Pour $x^0=(3, 3)$, $\hat{u}(x)=9^{\frac{1}{2}} = 3$ et la courbe d'indifférence associée à x^0 telle que $\hat{u}(x) = 3$ est la même que la courbe d'indifférence associée à x^0 telle que u(x) = 9. Ce qui diffère, c'est le niveau d'utilité associé à la courbe d'indifférence. Cependant, les préférences du consommateur seront reflétées de la même façon que l'on utilise l'une ou l'autre des fonctions $\hat{u}(x)$ et u(x). (**voir graphique 1-01**)



1.3.1 Utilité ordinale vs utilité cardinale

Utilité ordinale

Définition : Si l'utilité représentée par u(x) est ordinale, la fonction u peut être remplacée par n'importe quelle transformation strictement croissante $\hat{u}(x) = \phi(u(x))$ avec $\phi'>0$.

En d'autres termes, u peut être remplacée par n'importe quelle fonction ou transformation strictement croissante û(x), sans que cela ne change la solution au problème du consommateur. En fait, û(x) et u(x) ont les mêmes surfaces d'indifférence (courbe d'indifférence, dans le cas de deux biens). Dans l'exemple ci-dessus, que l'on prenne u(x) ou û(x), le couple $(X_1, X_2) = (8, 2)$ se place sur la courbe d'indifférence la plus éloignée. Tout ce qui change, c'est la «valeur» de cette courbe (16 dans le cas de u(x), 4 dans le cas de û(x)). On parle d'utilité ordinale, puisque l'on raisonne en termes de **classement** des choix de consommation : tous les couples de la seconde courbe d'indifférence sont préférés à ceux de la première. Exemple, le couple (8, 2) est préféré à (3, 3) autant au niveau de u(x) que de û(x), car 16 est supérieur à 9, tout comme 4 est supérieur à 3.

Utilité cardinale

Soit x^1, x^2, x^3 et x^4 avec $u(x^2) > u(x^1)$ et $u(x^4) > u(x^3)$.

Peut-on comparer $u(x^2) - u(x^1)$ avec $u(x^4) - u(x^3)$?
Peut-on savoir, par exemple, si $u(x^2) - u(x^1) > u(x^4) - u(x^3)$?

Si l'utilité (ou satisfaction) représentée par u est ordinale, la réponse est non. En effet, on a vu que dans ce cas, u peut être remplacée par une fonction monotone croissante û(x). Or, même si on a $u(x^2) - u(x^1) > u(x^4) - u(x^3)$, il n'est pas certain que $\hat{u}(x^2) - \hat{u}(x^1) > \hat{u}(x^4) - \hat{u}(x^3)$.
(exercice : vous pouvez le constater par vous même en posant $u(x) = x_1 x_2$, $\hat{u}(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, $x^1=(3, 3)$, $x^2=(4, 4)$, $x^3=(2, 2)$ *et* $x^4=(9,1)$*).*

Si l'utilité représentée par u est cardinale, la fonction u pourrait être remplacée par n'importe quelle transformation linéaire croissante

$$\mathbf{u^*(x) = au(x)+b,\ a>0}$$

et on aurait que si $u(x^2) - u(x^1) > u(x^4) - u(x^3)$, alors $u'(x^2) - u'(x^1) > u'(x^4) - u'(x^3)$

(*exercice : vous pouvez le constater en posant* $u(x)=x_1x_2$ *et* $u'(x)=2x_1x_2+10$, $x^1=(3, 3)$, $x^2=(4, 4)$, $x^3=(2, 2)$ *et* $x^4=(9,1)$*)*.

Remarque : une fonction d'utilité ordinale est suffisante pour obtenir **tous nos résultats**.

1.3.2 Hypothèses sur u

H.1 $u \in C^2$ (i.e. u est deux fois continûment dérivable).

Pour résoudre le problème de maximisation de l'utilité du consommateur, il est utile, quoique non essentiel, que la fonction u soit dérivable deux fois.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left[\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_\ell} \right]$$

$$U = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_\ell} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\ell \partial x_1}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\ell \partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\ell^2} \end{bmatrix} \text{ (matrice hessienne)}$$

H.2 u est strictement croissante (i.e. $\dfrac{\partial u}{\partial x} > 0$)

On suppose que la satisfaction du consommateur augmente avec x (le consommateur est insatiable).

H.3 u est différentiellement strictement quasi-concave

i.e. $\zeta' U \zeta < 0 \text{ pour } \zeta \neq 0 \text{ et } \zeta' \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, où U est la matrice hessienne de u.

Cette dernière hypothèse nous assure que les surfaces (courbes) d'indifférence sont convexes.

1.3.3 Le taux marginal de substitution

Soit u(x) la fonction d'utilité du consommateur. Le taux marginal de substitution du bien s par rapport au bien r mesure la quantité du bien r qu'il faut donner au consommateur en échange d'une unité de bien s, de manière à ce que sa satisfaction (utilité) demeure la même.

Soit x^1 et x^2 tels que $u(x^1) = u(x^2)$.

$$\Delta u = u(x^1) - u(x^2) \approx du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_\ell} dx_\ell = 0$$

Supposons que seules les quantités des biens s et r varient, i.e. $dx_h=0$, pour tout $h \neq r$ ou s

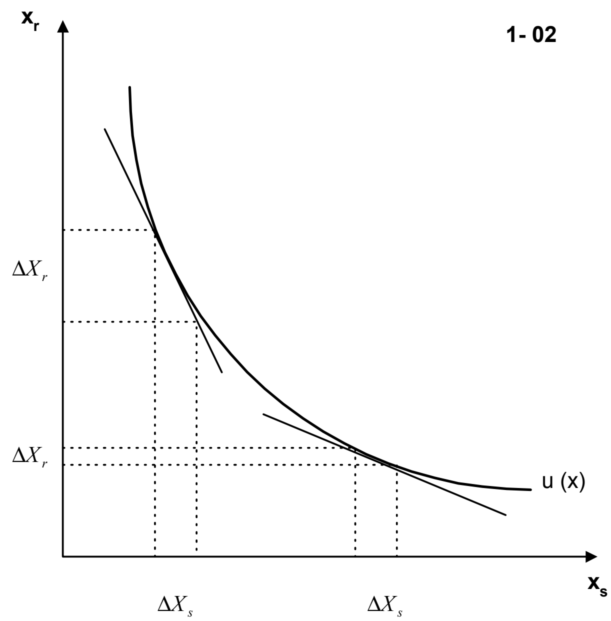
On a alors :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial u}{\partial x_s} dx_s = 0 \Rightarrow \frac{\partial x_r}{\partial x_s} = -\frac{\partial u / \partial x_s}{\partial u / \partial x_r} = TMS_{s,r}$$

Le taux marginal de substitution correspond au prix **personnel** du consommateur pour le bien s, exprimé en terme du bien r.

Le TMS est toujours négatif : le consommateur ne cédera une unité du bien s que si on le compense par une quantité positive du bien r (les courbes d'indifférence sont convexes).

Par ailleurs, le TMS varie le long de la courbe d'indifférence : quand le consommateur possède peu du bien s, il exigera une plus grande compensation en bien r quand vient le temps de céder une unité du bien s, que quand il possède beaucoup du biens. (**voir graphique 1-02**)



1.4 La théorie du consommateur

1.4.1 L'équilibre du consommateur

On suppose que les préférences du consommateur sont représentables par une fonction d'utilité u(x) définie sur X.

La consommateur cherche à maximiser u(x) tout en étant soumis à certaines contraintes, soit
$x \in X$ et $px \leq R$.

La solution d'équilibre nous donne $x^0 = \xi(p, R)$ représentant la fonction de demande du consommateur.

Pour que l'équilibre puisse exister et que les fonctions de demande aient des propriétés «sensées», on doit faire des hypothèses sur u(x), hypothèses que nous avons déjà établies précédemment, et sur X (en gros, X doit être un ensemble convexe, fermé et borné).

Le problème est donc : maximiser u(x) sujet à $x \in X$ et $px \leq R$, ce qui revient à maximiser le lagrangien :

$$\underset{x,\lambda}{Max} \quad L = u(x) - \lambda(p'x - R)$$

Si on résout :

1) $$\frac{\partial L}{\partial x_h} = \frac{\partial u}{\partial x_h} - \lambda p_h \qquad h = 1,\ldots,\ell$$

2) $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -p'x + R$$

Remarques

Dans la mesure où $X \cap (x \mid px \leq R) \neq \phi$, $p > 0$ et que les hypothèses sur X (convexe, fermé et borné inférieurement) et sur u (continûment dérivable et croissante) sont respectées, alors l'équilibre existe.

Les équations 1) et 2) s'annulent au point où le vecteur x est optimal. 1) et 2) constituent les conditions de premier ordre pour un équilibre du consommateur.

Si la fonction u est quasi-concave, les conditions de second ordre sont automatiquement satisfaites et les conditions de premier ordre deviennent nécessaires **et** suffisantes. Si la fonction u est strictement quasi-concave, l'équilibre est unique.

Interprétation des conditions d'équilibre

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x_h} - \lambda p = 0 \qquad h = 1, \ldots, \ell$

2) $-\sum_{h=1}^{\ell} p_h x_h + R = 0$

Une solution $(x^o = (x_1^o, x_2^o, \ldots, x_\ell^o))$ de ce système d'équations est un équilibre du consommateur.

Considérons l'équation 1) pour h = s , r. On a :

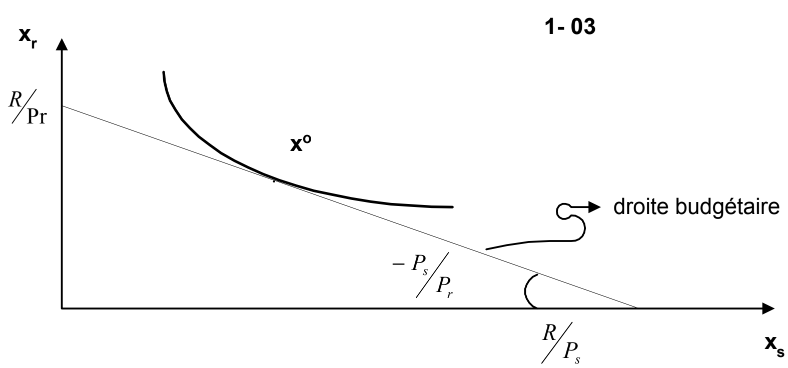
$$\frac{\partial u}{\partial x_s} - \lambda p_s = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\partial u}{\partial x_s} * \frac{1}{p_s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_r} - \lambda p_r = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\partial u}{\partial x_r} * \frac{1}{p_r}$$

d'où $\lambda = \dfrac{\partial u}{\partial x_s} * \dfrac{1}{p_s} = \dfrac{\partial u}{\partial x_r} * \dfrac{1}{p_r}$

$$\Rightarrow \frac{\partial u / \partial x_s}{\partial u / \partial x_r} = \frac{p_s}{p_r} \quad \text{(condition d'équilibre)}$$

(**voir graphique 1-03**)



i) le côté gauche : $\frac{dx_r}{dx_s} = -\frac{\partial u / \partial x_s}{\partial u / \partial x_s}$ représente la pente de la tangente à la courbe d'indifférence. C'est le TMS $_{s,r}$;

ii) le côté droit (pour fin de représentation graphique, on suppose $x_h = 0$ pour $h \neq r$, s) $\frac{dx_r}{dx_s} = \frac{p_s}{p_r}$ représente la pente de la droite budgétaire, car dans ce cas, $p_r x_r + p_s x_s = R$

$$\Rightarrow \quad x_r = -\frac{p_s}{p_r} x_s + \frac{R}{P_r} .$$

Ainsi, les conditions d'équilibre peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} TMS_{s,r} = -\dfrac{p_s}{p_r} & (\forall\ s, r\ ;\ s \neq r) \\ \displaystyle\sum_h p_h x_h = R & \end{cases}$$

À l'équilibre, le taux marginal de substitution $TMS_{s,r}$ (ou valeur personnelle accordée par la consommateur au bien s - exprimée en terme du bien r) sera égal au rapport des prix $-p_s/p_r$ (ou prix relatif «officiel» du bien s - exprimé en terme du bien r), et ce, pour tous les couples de biens (s, r). De plus, le consommateur doit respecter sa contrainte budgétaire.

1.4.2 Existence des fonctions de demande (*)

Le système d'équations :

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_h} - \lambda p_h = 0 \\ -\displaystyle\sum_{h=1}^{\ell} p_h x_h + R = 0 \end{cases} \qquad h = 1, \ldots, \ell$$

est un système de $\ell + 1$ équations avec 2 ($\ell + 1$) variables (ℓ variables x_h, ℓ variables p_h, λ et R).

Les fonctions de demande existent-elles ? C'est-à-dire, peut-on exprimer $x_1, x_2, \ldots, x_\ell$ et λ en fonction de $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ et R ?

Soit $b^o = \left(x_1^o, \ldots, x_\ell^o, \lambda^0, p_1^o, \ldots, p_\ell^o, R^o\right)$ un point qui satisfait les $\ell + 1$ équations (*). La réponse est oui si la dérivée du système d'équations (*) par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_\ell$ et λ (et évaluée au point b^o) est une matrice de rang maximal (application du théorème des fonctions implicites).

Par exemple, pour le système

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$-(p_1 x_1 + p_2 x_2) + R = 0$$

si la matrice

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2} & -p_1 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix}$$

(évaluée en $b^o = \left(x_1^o, x_2^o, \lambda^0, p_1^o, p_2^o, R^o\right)$), est de rang maximal, on peut exprimer x_1, x_2 et λ en fonction de p_1, p_2 et R :

$$x_1 = \xi_1(p_1, p_2, R)$$

$$x_2 = \xi_2(p_1, p_2, R)$$

$$\lambda = \lambda^*(p_1, p_2, R)$$

dans un voisinage de $\left(p_1^o, p_2^0, R^0\right)$. De plus, les fonctions ξ_1, ξ_2 et λ^* sont continuellement dérivables.

Grâce aux hypothèses faites sur u, nous pourrions montrer que cette matrice est de rang maximal et donc que les fonctions de demande existent.

Lorsque l'on travaille avec une fonction d'utilité particulière, le calcul direct des fonctions de demande remplace la preuve d'existence. C'est ce que l'exemple suivant vient illustrer.

Exemple 1

Soit $u(x_1, x_2) = x_1x_2$ la fonction d'utilité du consommateur, p_1 le prix de x_1, p_2 le prix de x_2 et R son revenu. Le problème du consommateur est alors de maximiser son utilité compte tenu de sa contrainte budgétaire, c'est-à-dire :

$$\underset{x_1, x_2, \lambda}{Max} L = x_1 x_2 - \lambda\left(p_1 x_1 + p_2 x_2 - R\right) \qquad (p_1, p_2, > 0)$$

Les conditions de premier ordre sont :

1) $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - \lambda p_1 = 0$

2) $\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - \lambda p_2 = 0$

3) $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 = R$ (la contrainte budgétaire)

De 1) et 2) : $\lambda = \dfrac{x_2}{p_1} = \dfrac{x_1}{p_2}$, d'où $x_2 = x_1 \dfrac{p_1}{p_2}$

on remplace dans 3) : $p_1 x_1 + p_2\left(x_1 \dfrac{p_1}{p_2}\right) = R$

et on obtient : $x_1^* = \dfrac{R}{2p_1}$ et donc $x_2^* = \dfrac{R}{2p_2}$

qui sont les fonctions de demande des biens x_1 et x_2. On peut aussi obtenir une fonction pour λ.

Note : Dans cet exemple, les paramètres du problème (p_1, p_2, R) ne sont pas fixés de sorte que sa solution nous donne les fonctions de demande (fonctions de comportement) du consommateur pour les biens 1 et 2 (et pour λ). Si, par ailleurs, nous fixons les paramètres à un niveau donné, nous n'obtiendrons plus des fonctions de demande mais plutôt une valeur d'équilibre pour x_1, x_2 et λ. Si, par exemple, p_1=1, p_2=2 et R=20, nous avons :

$x_1^* = 10$
$x_2^* = 5$
(vous pouvez vérifier en solutionnant le problème donné ci-haut)

Cette solution satisfait-elle aux conditions d'équilibre ?

1) pente de la tangente à la courbe d'indifférence

$$TMS = \frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = -\frac{x_2}{x_1} = -\frac{5}{10}$$

2) pente de la contrainte :

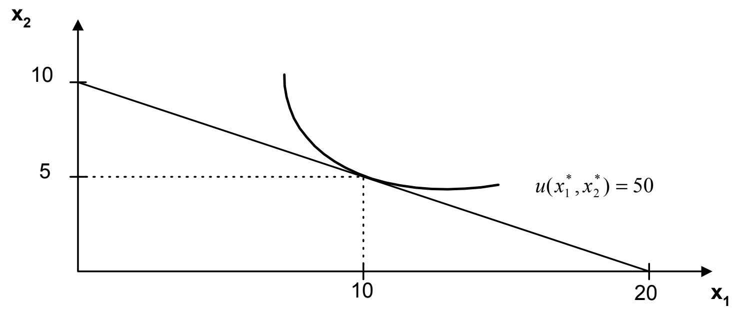
$$p_1x_1 + p_2x_2 = R \Rightarrow x_2 = \frac{R}{p_2}\left[-\frac{p_1}{p_2}\right]x_1$$

ici, $x_2 = 10$ **[- (½)]** x_1

À l'équilibre : $TMS = -\dfrac{p_1}{p_2}$ est vérifiée $\left(-\dfrac{5}{10} = -\dfrac{1}{2}\right)$

(**voir graphique 1-04**)

1- 04



1.4.3 <u>Équation fondamentale du consommateur</u>

<u>Comportement du consommateur au voisinage de l'équilibre</u>

Soit x = ξ (p, R), le système de demande.

Considérons la différentielle totale de ce système. On a :

$$dx = \frac{\partial \xi}{\partial p} dp + \frac{\partial \xi}{\partial R} dR \qquad (1)$$

mais R = px, d'où dR = p'dx + x'dp (2)

substituons (2) dans (1) :

$$dx = \frac{\partial \xi}{\partial p} dp + \frac{\partial \xi}{\partial R} (p'dx + x'dp)$$

$$dx = \left[\frac{\partial \xi}{\partial p} + \frac{\partial \xi}{\partial R} x' \right] dp + \frac{\partial \xi}{\partial R} p'dx$$

$$dx = K\,dp + \frac{\partial \xi}{\partial R} p'dx \qquad (3)$$

où K est la matrice de Slutsky, $\frac{\partial \xi}{\partial R}$ est le vecteur d'effets-revenu et p'dx représente la variation du revenu réel.

Si la variation du revenu réel est nulle, i.e. p'dx = 0, on a de (3) :

$$dx = Kdp \Rightarrow K = \left.\frac{dx}{dp}\right|_{pdx=0}$$

Posons $\ell = 2$. Dans ce cas, (3) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_1 \\ dp_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial\xi_1 / \partial R \\ \partial\xi_2 / \partial R \end{bmatrix} \left(p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \right)$$

où K= $\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\xi_1}{\partial p_1} + \dfrac{\partial\xi_1}{\partial R} x_1 & \dfrac{\partial\xi_1}{\partial p_2} + \dfrac{\partial\xi_1}{\partial R} x_2 \\ \dfrac{\partial\xi_2}{\partial p_1} + \dfrac{\partial\xi_2}{\partial R} x_1 & \dfrac{\partial\xi_2}{\partial p_2} + \dfrac{\partial\xi_2}{\partial R} x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$

De façon générale, on peut écrire :

$$k_{r,s} = \left.\frac{\partial\xi_r}{\partial p_s}\right|_{pdx=0} = \frac{\partial\xi_r}{\partial p_s} + \frac{\partial\xi_r}{\partial R} x_s$$

ou : $\dfrac{\partial\xi_r}{\partial p_s} = \left.\dfrac{\partial\xi_r}{\partial p_s}\right|_{pdx=0} - \dfrac{\partial\xi_r}{\partial R} x_s$

Cette dernière équation est appelée **<u>Équation de Slutsky</u>**.

L'équation de Slutsky nous permet de décomposer l'effet d'une variation du prix d'un bien s sur la demande d'un bien r en un effet de substitution (ou effet-prix compensé) et un effet-revenu.

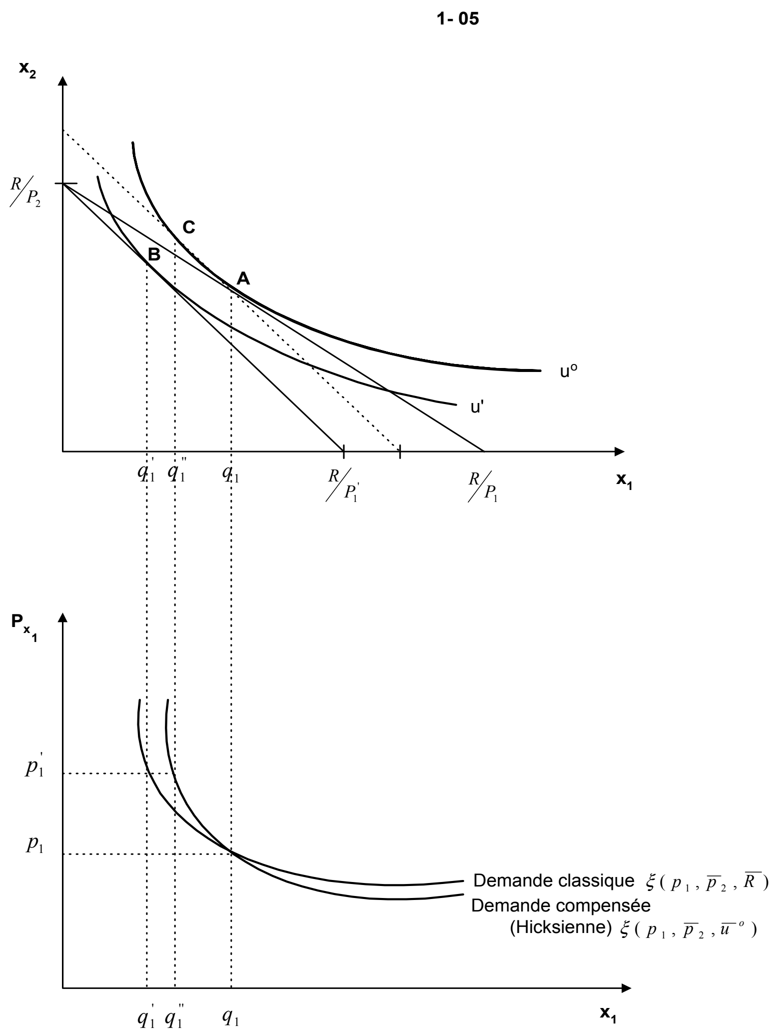
Équation de Slutsky :

$$\frac{\partial\xi_r}{\partial p_s} = \left.\frac{\partial\xi_r}{\partial p_s}\right|_{pdx=0} - \frac{\partial\xi_r}{\partial R} x_s$$

effet-prix effet de substitution effet-revenu

Examinons l'impact d'une augmentation du prix d'un bien sur la demande de ce même bien ($r = s$). Au départ, on est à l'équilibre au point A avec les prix p_1, p_2 et le revenu R.

(**voir graphique 1-05**)



À ce point, le consommateur maximise son utilité u^o en consommant q_1 unités de x_1. Quand le prix x_1 augmente ($p_1 \rightarrow p_1'$) la droite de budget pivote vers la gauche à partir de l'ordonnée. Le consommateur atteint un nouvel équilibre en B : il consomme maintenant q_1' unités de x_1 et son utilité est plus faible.

Le passage de A à B se décompose comme suit :

Passage de A à C : l'effet de substitution. On «compense» le consommateur pour la hausse de p_1 de manière à ce qu'il puisse, avec les nouveaux prix, s'acheter un panier de biens qui lui procure le même niveau de satisfaction qu'auparavant (soit u^o). Si on verse au consommateur une telle compensation, sa demande compensée (ou demande Hicksienne) au prix p_1' sera de q_1''.

Passage de C à B : l'effet-revenu : Puisque son revenu est fixe, la hausse du prix du bien x_1 se traduit par une baisse du pouvoir d'achat du consommateur, donc une baisse de son revenu réel. Or, si le bien est un bien normal, une baisse du revenu réel entraînera une baisse de la demande pour ce bien.

Exemple 2

Retournons à l'exemple précédent, soit $u(x_1, x_2) = x_1x_2$. À l'équilibre, nous avions que les quantités $x_1^* = 10$ et $x_2^* = 5$ pour des prix $p_1=1$ et $p_2=2$ avec un revenu R de 20 (point A). Supposons que le prix de x_1 augmente de 1$, soit $p_1=2$.

Quel sera l'effet de substitution ? Il faut compenser le consommateur de façon à ce que son utilité demeure inchangée (soit $u^o = 50$) malgré les nouveaux prix. Si $p_1^T = 2$, le nouveau rapport des prix sera de 1, ce qui correspond à la pente de la nouvelle droite de budget (en valeur absolue, puisque la pente est négative). À ce nouveau rapport de prix, le consommateur maximise son utilité quand son $TMS_{1,2} = -p_1/p_2 = -1$ (point B).

or, $-TMS_{1,2} = \dfrac{x_2}{x_1} = 1 \Leftrightarrow x_2 = x_1$

par ailleurs : $u^o = 50 \Leftrightarrow x_1x_2 = 50 \Leftrightarrow x_1^2 = 50$

Donc, $x_1 = x_2 = \sqrt{50} \cong 7{,}07$

$\therefore$ Le passage de (10, 5) à (7,07 ; 7,07) représente l'effet de substitution.

Quel sera l'effet-revenu ? Au nouvel équilibre, le $TMS_{1,2}$ sera égal à -1 puisque la nouvelle courbe d'utilité devra être tangente à la nouvelle droite de budget dont la pente est égale à -1. Par conséquent, comme nous l'avons vu, $-TMS_{1,2} = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Cependant, le revenu nominal du consommateur n'a pas changé : R = 20. On a donc, avec les nouveaux prix :

$2x_1 + 2x_2 = 20$

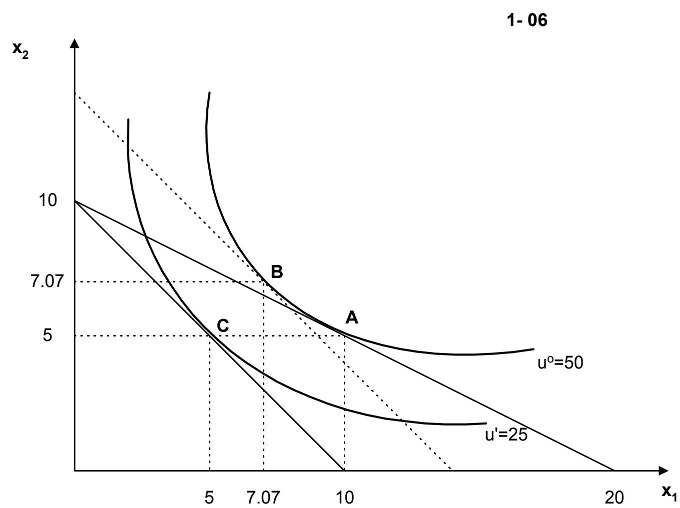
et puisque $x_1 = x_2$ on aura : $4x_1 = 20 \Rightarrow x_1 = 5$ et $x_2 = 5$.

$\therefore$ Le passage de (7,07 ; 7,07) à (5, 5) représente l'effet-revenu.

En fait, pour trouver le nouvel équilibre, il suffisait de remplacer p_1 par p_1' dans les fonctions de demande à l'équilibre :

$-\ x_1^{*T} = \frac{R}{2p_1^{'}} = \frac{20}{4} = 5$ et $-\ x_2^{*T} = \frac{R}{2p_2} = \frac{20}{4} = 5$

L'effet-prix total est donc le passage de (10, 5) à (5, 5) (**voir graphique 1-06**)



Passage de A à B $\Rightarrow$ effet de substitution ;

Passage de B à C $\Rightarrow$ effet-revenu

Passage de A à C $\Rightarrow$ effet-prix

Équation fondamentale : (*)

Substitutuons les fonctions de demande $x_1 = \xi_1(p_1, p_2, R)$ et $x_2=\xi_2(p_1, p_2, R)$ et la fonction $\lambda=\lambda(p_1, p_2, R)$ dans les conditions d'équilibre. On a :

1) $$\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big(\xi_1(p_1, p_2, R), \xi_2(p_1, p_2, R)\Big) - \lambda(p_1, p_2, R)p_1 = 0$$

2) $$\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big(\xi_1(p_1, p_2, R), \xi_2(p_1, p_2, R)\Big) - \lambda(p_1, p_2, R)p_2 = 0$$

3) $$-\ p_1\xi_1(p_1, p_2, R) - p_2\xi_2(p_1, p_2, R) + R = 0$$

Si on dérive ce système d'équations ((1), (2), (3)) par rapport à p_1, p_2 et R, on obtient :

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial\xi 1/\partial p1 & \partial\xi 1/\partial p2 & \partial\xi 1/\partial R \\ \partial\xi 2/\partial p1 & \partial\xi 2/\partial p2 & \partial\xi 2/\partial R \\ \partial\lambda/\partial p1 & \partial\lambda/\partial p2 & \partial\lambda/\partial R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ x_1 & x_2 & -1 \end{bmatrix} \equiv 0$$

ou <u>l'équation fondamentale du consommateur :</u>

$$\begin{bmatrix} u & -p \\ -p' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial\xi/\partial p & \partial\xi/\partial R \\ \partial\lambda/\partial p & \partial\lambda/\partial R \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \lambda I_2 & 0 \\ x' & -1 \end{bmatrix} (*)$$

ou I_2 est la matrice identité d'ordre 2 :

soit $\begin{bmatrix} 1/\lambda\, I_2 & 0 \\ 1/\lambda\, x' & -1 \end{bmatrix}$ l'inverse de $\begin{bmatrix} \lambda I_2 & 0 \\ x' & -1 \end{bmatrix}$

En post-multipliant (*) de chaque côté par $\begin{bmatrix} 1/\lambda\, I_2 & 0 \\ 1/\lambda\, x' & -1 \end{bmatrix}$

on obtient :

$$\begin{bmatrix} U & -p \\ -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\lambda\left(\partial\xi/\partial p + \partial\xi/\partial R * x'\right) & -\partial\xi/\partial R \\ 1/\lambda\left(\partial\xi/\partial p + \partial\lambda/\partial R * x'\right) & -\partial\lambda/\partial R \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

ou :

$$\begin{bmatrix} U & -p \\ -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\lambda\, K & -\partial\xi/\partial R \\ 1/\lambda\left(\partial\lambda/\partial p\right)^c & -\partial\lambda/\partial R \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

que l'on appelle <u>l'équation fondamentale transformée</u>.

À l'aide de cette dernière équation, on peut facilement démontrer les propriétés suivantes :

- $K \equiv K'$
- $Kp \equiv 0$
- $\zeta' K \zeta < 0$ pour $\zeta \neq \theta p$, $\theta \in R$
- $p' \dfrac{\partial \xi}{\partial R} \equiv 1$

dont nous allons parler à la prochaine section.

1.4.4 <u>Les propriétés des fonctions de demande</u>

Soit $x_h = \xi_h(p_1, p_2, \ldots, p_\ell, R)$ la demande du bien h. On a les propriétés suivantes :

1° <u>K ≡ K'</u> : la symétrie

$$K_{r,s} = K_{s,r} \quad \text{ou} \quad \left.\frac{\partial x_r}{\partial p_s}\right|_{p\,dx=0} = \left.\frac{\partial x_s}{\partial p_r}\right|_{p\,dx=0} = 0$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial x_r}{\partial p_s} + \frac{\partial x_r}{\partial R} x_s = \frac{\partial x_s}{\partial p_r} + \frac{\partial x_s}{\partial R} x_r$$

L'effet de substitution de r pour s est égal à l'effet de substitution de s pour r.

<u>Exemple</u> :

Supposons que r représente le café et s le thé. Ces deux biens étant substituables l'un à l'autre, on devrait avoir dans ce cas :

$$\left.\frac{\partial x_r}{\partial p_s}\right|_{p\,dx=0} > 0 \ \ et \ \left.\frac{\partial x_s}{\partial p_r}\right|_{p\,dx=0} > 0$$

L'égalité des effets de substitution entre ces deux biens reflète 2 choses :

1) $\left.\frac{\partial x_r}{\partial p_s}\right|_{p\,dx=0} > 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial x_s}{\partial p_r}\right|_{p\,dx=0} > 0$ (et vice versa)

si l'effet de substitution du café pour le thé est positif, il doit en être de même pour l'effet de substitution du thé pour le café (et vice versa). C'est une condition de **cohérence interne**.

2) $\left.\frac{\partial x_r}{\partial p_s}\right|_{p\,dx=0} = \left.\frac{\partial x_s}{\partial p_r}\right|_{p\,dx=0} = 0$

Si, en plus, les effets de substitution sont égaux, cela nous assure qu'il n'y a pas de sur-réaction ou de sous-réaction à une variation compensée de prix, de la part du consommateur.

2° <u>Kp ≡ 0</u> : Homogénéité

Cette propriété implique l'homogénéité de degré 0 en p et R des fonctions de demande. En effet : $Kp \equiv 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial \xi}{\partial p} + \frac{\partial \xi}{\partial R} * x'\right] p \equiv 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \xi}{\partial p} p + \frac{\partial \xi}{\partial R} x' p \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \xi}{\partial p} p + \frac{\partial \xi}{\partial R} R \equiv 0$$

et donc, par le théorème d'Euler, ξ(p,R) est homogène de degré 0 en p et R.

Rappel : soit $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Si $ky = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_x$, alors f est homogène de degré k.

Le fait que les fonctions de demande soient homogènes de degré 0 en p et R signifie que le consommateur ne souffre pas d'illusion monétaire : quand les prix et le revenu augmente dans les mêmes proportions, sa demande ne change pas.

3° $\quad p' \frac{\partial \xi}{\partial R} \equiv 1$: additivité

Soit $p_h \frac{\partial x_h}{\partial R}$ la propension marginale à consommer du bien h. Cette propriété nous indique que la somme des propensions marginales à consommer est égale à 1. Autrement dit : si R augmente d'un dollar, ce dernier sera entièrement dépensé.

4° $\quad$ <u>$\zeta' K \zeta < 0$ pour $\zeta \neq \theta p$, $\theta \varepsilon R$</u>

K est définie négative. Cette propriété implique que les termes de la diagonale de K sont tous négatifs. En effet, les termes de la diagonale de K, par exemple,

$$K_{rr} = \left.\frac{\partial x_r}{\partial p_r}\right|_{p\,dx = 0}$$

représentent l'effet de substitution d'un bien quand son propre prix varie. Il est évident que le consommateur ne peut conserver la même utilité, quand le prix d'un bien augmente, que s'il y substitue un autre bien. Donc cet effet de substitution est toujours négatif. Ce qui revient à dire que la pente de la demande compensée (ou Hicksienne) d'un bien est toujours négative.

Il n'en va pas nécessairement de même pour la demande classique (Marshallienne) d'un bien. En général, il est vrai que la demande d'un bien décroît par rapport à son prix et donc que la pente de la fonction de demande ∂x/∂p est négative. Il existe cependant des cas où la pente de la fonction de demande peut être (souvent localement seulement) positive : c'est le cas des biens Giffen. On a alors :

$$\frac{\partial x_h}{\partial p_h} = \left.\frac{\partial x_h}{\partial p_h}\right|_{p\,dx=0} - \frac{\partial x_h}{\partial R} x_h$$

L'effet de substitution $\left.\frac{\partial x_h}{\partial p_h}\right|_{p\,dx=0}$ est toujours négatif. Cependant, l'effet-revenu peut être positif ou négatif, puisque :

- $\frac{\partial x_h}{\partial R} > 0$ si r est un bien normal
- $\frac{\partial x_h}{\partial R} < 0$ si r est un bien inférieur

Si r est un bien normal, alors la pente de la fonction de demande sera certainement négative, puisque :

$$\underset{(-)}{\frac{\partial x_h}{\partial p_h}} = \underset{(-)}{\left.\frac{\partial x_h}{\partial p_h}\right|_{p\,dx=0}} - \underset{(+)}{\frac{\partial x_h}{\partial R}} x_h$$

Mais si r est un bien inférieur, le résultat est incertain ; la fonction de demande aura une pente négative si l'effet-revenu ne dépasse pas (en valeur absolue) l'effet de substitution. La fonction de demande aura une pente positive si, au contraire, l'effet-revenu est plus important que l'effet substitution. Dans un tel cas, on dit qu'il s'agit d'un bien Giffen.

Le signe des autres éléments de la matrice K nous indique s'il s'agit de biens substituables ou complémentaires.

Si $\left.\frac{\partial x_r}{\partial p_s}\right|_{pdx=0} > 0$ r et s sont des biens substituables ;

$\left.\frac{\partial x_r}{\partial p_s}\right|_{pdx=0} < 0$ r et s sont des biens complémentaires ;

$\left.\frac{\partial x_r}{\partial p_s}\right|_{pdx=0} = 0$ r et s sont indépendants.

Paradoxe : Deux biens complémentaires quant au goût peuvent apparaître comme substituts dans le comportement du consommateur.

Par exemple, le filet mignon et les épinards, complémentaires quant au goût, peuvent devenir des produits substituts pour le consommateur : si le prix du filet mignon augmente, ma consommation d'épinards devrait normalement baisser (à cause de la complémentarité) mais il se peut que ma demande d'épinards augmente de façon à compenser pour la baisse de ma consommation de filet mignon.

Substituabilité dominante (**cette section est facultative**)

Les propriétés 2° et 4° nous permettent d'affirmer qu'il y a plus de biens substituts que de biens complémentaires dans l'économie. En effet, selon 2° :

$$Kp = 0 \Rightarrow \sum_r p_r \left.\frac{\partial x_r}{\partial p_s}\right|_{pdx=o} = 0$$

Supposons l'existence de 3 biens dans l'économie. On a :

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$p_1K_{11} + p_2K_{21} + p_3K_{31} = 0$

$$p_1\left(\left.\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right|_{pdx=0}\right) + p_2\left(\left.\frac{\partial x_2}{\partial p_1}\right|_{pdx=0}\right) + p_3\left(\left.\frac{\partial x_3}{\partial p_1}\right|_{pdx=0}\right) = 0$$

$$p_2\left(\left.\frac{\partial x_2}{\partial p_1}\right|_{pdx=0}\right) + p_3\left(\left.\frac{\partial x_3}{\partial p_1}\right|_{pdx=0}\right) = -p_1\left(\left.\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right|_{pdx=0}\right)$$

Or, selon 4^o : $K_{11} = \left(\left.\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right|_{pdx=0}\right)$ est toujours négatif.

D'où $-p_1K_{11}$ doit être positif. Cependant, $-p_1K_{11} > 0$ implique :

$$p_2\left(\left.\frac{\partial x_2}{\partial p_1}\right|_{pdx=0}\right) + p_3\left(\left.\frac{\partial x_3}{\partial p_1}\right|_{pdx=0}\right) > 0$$

ce qui n'est possible que si $\left(\left.\frac{\partial x_2}{\partial p_1}\right|_{pdx=0}\right)$ ou $\left(\left.\frac{\partial x_3}{\partial p_1}\right|_{pdx=0}\right)$ est positif ou si tous les deux sont positifs. D'où la substituabilité dominante.

Exemple 3

Soit $u(x_1, x_2) = x_1x_2$. Quelle est la matrice de Slutsky associée à cette fonction d'utilité ? Nous savons que les demandes pour les biens x_1 et x_2 du consommateur sont :

$x_1^* = R/2p_1$ et $x_2^* = R/2p_2$

$$K_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial R}x_1 \Rightarrow K_{11} = -\frac{R}{2p_1^2} + \frac{1}{2p_1} * \frac{R}{2p_1}$$

$$K_{11} = -\frac{2R}{4p_1^2} + \frac{R}{4p_1^2} = -\frac{R}{4p_1^2}$$

$$K_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} + \frac{\partial x_1}{\partial R}x_2 \Rightarrow K_{12} = 0 + \frac{1}{2p_1} * \frac{R}{2p_2} = \frac{R}{4p_1p_2}$$

$$K_{21} = \frac{\partial x_2}{\partial p_1} + \frac{\partial x_2}{\partial R}x_1 \Rightarrow K_{21} = 0 + \frac{1}{2p_2} * \frac{R}{2p_1} = \frac{R}{4p_1p_2}$$

$$K_{22} = \frac{\partial x_2}{\partial p_2} + \frac{\partial x_2}{\partial R}x_2 \Rightarrow K_{22} = -\frac{R}{2p_2^2} + \frac{1}{2p_2} * \frac{R}{2p_2} = -\frac{R}{4p_2^2}$$

On obtient :

$$K = \begin{bmatrix} -R/4p_1^2 & R/4p_1p_2 \\ R/4p_1p_2 & -R/4p_2^2 \end{bmatrix}$$

Vérifions les propriétés des fonctions de demande :

1° K ≡ K' évident, puisque $k_{12} = R/4p_1p_2 = k_{21}$

2° Kp ≡0 $\begin{bmatrix} -R/4p_1^2 & R/4p_1p_2 \\ R/4p_1p_2 & -R/4p_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/4p_1 & + & R/4p_1 \\ R/4p_2 & - & R/4p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3° p'*∂x/∂R = 1 $\dfrac{\partial x}{\partial R} = \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial R \\ \partial x_2/\partial R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2\,p_1 \\ 1/2\,p_2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow p'\frac{\partial x}{\partial R} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2\,p_1 \\ 1/2\,p_2 \end{bmatrix} = 1/2 + 1/2 = 1$$

4° K est définie négative : $K_{11} = -\dfrac{R}{4p_1^2} < 0$ et $K_{22} = -\dfrac{R}{4p_2^2} < 0$

Remarquons finalement que $k_{12} > 0$ et donc que les biens x_1 et x_2 sont substituables (inévitablement, dans ce cas, parce qu'il n'y a que deux biens).

<u>Propriétés sous forme d'élasticité</u>

Les propriétés que nous venons de voir peuvent toutes êtres exprimées sous forme d'élasticité .

Soit : $E_{rs} = \dfrac{\partial x_r}{\partial p_s} * \dfrac{p_s}{x_r}$, $E^*_{rs} = \left.\dfrac{\partial x_r}{\partial p_s}\right|_{p\,dx=0} \dfrac{p_s}{x_r}$

E_{rs} = élasticité du bien r au prix du bien s

E_{rs}* = élasticité compensée du bien r «au prix du bien s

Soit $Z_r = \dfrac{\partial x_r}{\partial R} * \dfrac{R}{x_r}$, $b_r = \dfrac{p_r x_r}{R}$

z_r = élasticité-revenu du bien r

b_r = part du budget consacré au bien r

1° Équation de Slutsky : $E_{rs} = E_{rs}^* - b_s z_r$

2° Homogénéité des fonctions de demande : $\sum_s E_{rs} + z_r = 0$

3° Somme des propensions marginales à consommer égale à 1 : $\sum_h b_h z_h = 1$

4° Substituabilité dominante : $\sum_s E_{rs}^* = 0$

1.5 La dualité et la théorie du consommateur

1.5.1 La fonction d'utilité indirecte

La fonction d'utilité indirecte décrit l'utilité maximale qui peut être obtenue pour chaque (p,R).

Max (u(x)| px ≤ R) donne
$$\begin{aligned} x_1^* &= \xi_1(p_1,\ldots,p_\ell,R) \\ x_2^* &= \xi_2(p_1,\ldots,p_\ell,R) \\ &\vdots \\ x_\ell^* &= \xi_\ell(p_1,\ldots,p_\ell,R) \end{aligned}$$

où ξ_h est la fonction de demande Marshallienne pour le bien h.

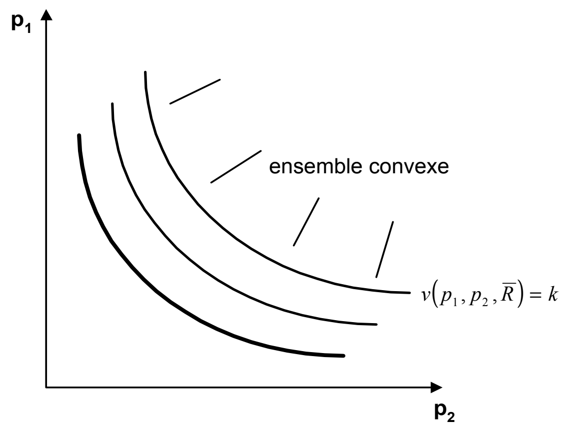
Définition :

$v(p, R) \equiv u(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_\ell^*) \equiv u[\xi_1(p_1, p_2, \ldots, p_\ell, R), \xi_2(p_1, p_2, \ldots, p_\ell, R), \ldots, \xi_\ell(p_1, p_2, \ldots, p_\ell, R)]$

Propriétés de v

1. v est une fonction continue
2. v est non croissante en p et non décroissante en R
3. v est quasi-convexe en p, i.e. $(p \mid v(p, R) \leq k)$ est un ensemble convexe pour tout $k \in \Re$.
4. v est homogène de degré 0 en (p, R). (**voir graphique 1-07**)

1- 07



1.5.2 Identité de Roy

Soit $x_h^* = \xi_h(p_1, \ldots, p_\ell, R)$ la demande classique ou Marshallienne pour le bien h. Cette fonction peut être obtenue de la fonction d'utilité indirecte, car :

$$x_h^* = \xi_h(p, R) = -\frac{\partial v / \partial p_h}{\partial v / \partial R} \qquad \text{pour}$$

$h = 1, 2, \ldots, \ell$

Preuve : (la présente preuve est présentée pour le cas $\ell = 2$)

$$v = v(p_1, p_2, R) = u(x_1^*, x_2^*) = u[\xi_1(p_1, p_2, R), \xi_2(p_1, p_2, R)]$$

1. $$\frac{\partial v}{\partial p_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1^*}\frac{\partial \xi_1}{\partial p_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2^*}\frac{\partial \xi_2}{\partial p_1}$$

2. $$\frac{\partial v}{\partial p_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1^*}\frac{\partial \xi_1}{\partial p_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2^*}\frac{\partial \xi_2}{\partial p_2}$$

3. $$\frac{\partial v}{\partial R} = \frac{\partial u}{\partial x_1^*}\frac{\partial \xi_1}{\partial R} + \frac{\partial u}{\partial x_2^*}\frac{\partial \xi_2}{\partial R}$$

Considérons l'opération suivante : à l'équation (1), on additionne l'équation (3), cette dernière étant déjà postmultipliée par x_1^*. On a alors :

$$\frac{\partial v}{\partial p_1} + \frac{\partial v}{\partial R}x_1^* = \left[\frac{\partial u}{\partial x_1^*}\frac{\partial \xi_1}{\partial p_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2^*}\frac{\partial \xi_2}{\partial p_1}\right] + \left[\frac{\partial u}{\partial x_1^*}\frac{\partial \xi_1}{\partial R}x_1^* + \frac{\partial u}{\partial x_2^*}\frac{\partial \xi_2}{\partial R}x_1^*\right]$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_1^*}\left[\frac{\partial \xi_1}{\partial p_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial R}x_1^*\right] + \frac{\partial u}{\partial x_2^*}\left[\frac{\partial \xi_2}{\partial p_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial R}x_1^*\right]$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_1^*}k_{11} + \frac{\partial u}{\partial x_2^*}k_{21}$$

$= \lambda p_1 K_{11} + \lambda p_2 K_{22}$, car $\partial u / \partial x_h^* = \lambda p_h$ (h=1, 2) (conditions d'équilibre du consommateur)

$= 0$ car $p'K \equiv 0$

On a donc $\dfrac{\partial v}{\partial p_1} + \dfrac{\partial v}{\partial R} x_1^* = 0$, ce qui implique $x_1^* = -\dfrac{\partial v / \partial p_1}{\partial v / \partial R}$

De la même façon, on peut montrer que $x_2^* = -\dfrac{\partial v / \partial p_2}{\partial v / \partial R}$

1.5.3 La fonction de dépense

La fonction de dépense associe à chaque (p, u) le coût minimal d'obtenir u aux prix $p = (p_1, p_2, \ldots, p_\ell)$ (u est le niveau d'utilité $u(x_1, x_2, \ldots, x_\ell) = u$).

$$\text{Min}\{ px \mid u(x) \geq \bar{u} \} \text{ donne } \begin{array}{l} \hat{x}_1 = h_1(p_1, \ldots, p_\ell, \bar{u}) \\ \hat{x}_2 = h_2(p_1, \ldots, p_\ell, \bar{u}) \\ \vdots \\ \hat{x}_\ell = h_\ell(p_1, \ldots, p_\ell, \bar{u}) \end{array}$$

où h_r est la fonction de demande Hicksienne pour le bien r.

Définition :

$$e(p, \bar{u}) \equiv \sum_{h=1}^{\ell} p_h \hat{x}_h$$
$$e(p, \bar{u}) \equiv p_1 h_1(p1, \ldots, p\ell, \bar{u}) + p_2 h_2(\cdots) + \ldots + p_\ell h_\ell(\cdots)$$

Propriétés de e

1. e est une fonction continue
2. e est non décroissante en p
3. e est concave en p
4. e est homogène de degré 1 en p

1.5.4 Le Lemme de Shephard

Soit $\hat{x}_r = h_r\left(p_1,\ldots,p_\ell,\overline{u}\right)$ la demande compensée ou Hicksienne pour le bien r. Cette fontion peut être obtenue de la fonction de dépense car :

$$\hat{x}_r = h_r\left(p,\overline{u}\right) = \frac{\partial e\left(p,\overline{u}\right)}{\partial p_r} \quad \text{r} = 1, 2, \ldots, \ell$$

Remarques

La demande compensée ou Hicksienne est la demande du consommateur lorsque son revenu est ajusté de manière à maintenir son niveau d'utilité constant à $\overline{u}$

$\dfrac{\partial h_r}{\partial p_s} = \dfrac{\partial e^2}{\partial p_s \partial p_r}\left(= \left.\dfrac{\partial x_r}{\partial p_s}\right|_{\substack{p\,dx=0 \\ ou\,du=0}} = K_{rs}\right)$ représente l'effet substitution ou l'effet-prix compensé.

La matrice hessienne de e donne la matrice de Slutsky. Ainsi, à cause des propriétés de la fonction de dépense, on dérive directement les propriétés suivantes sur K,

K est symétrique (car e est continue)

K est semi-définie négative (car e est concave)

La demande compensée n'est pas observable. Toutefois, par l'équation de Slutsky, on a que :

$$\frac{\partial h_r}{\partial p_s} = \left.\frac{\partial x_r}{\partial p_s}\right|_{p\,dx=0} = \frac{\partial x_r}{\partial p_s} + \frac{\partial x_r}{\partial R}x_s$$, où $\partial x_r/\partial p_s$ et $\partial x_r/\partial R$ sont observables.

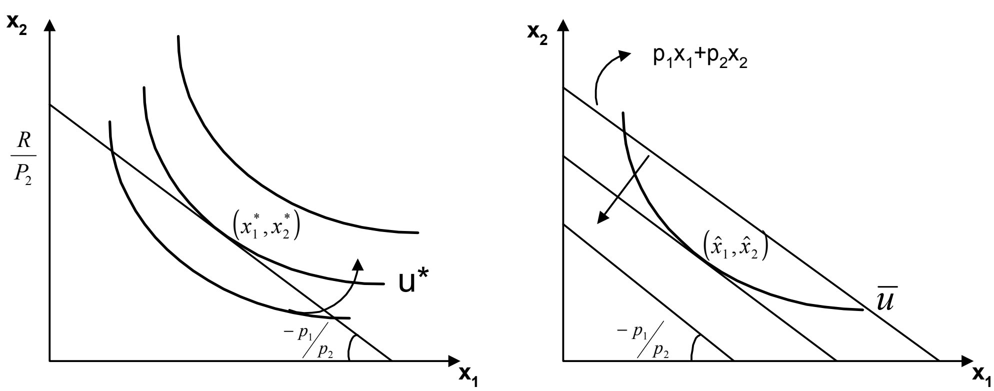
1.5.5 La dualité

Le problème du consommateur

Primal		Dual
$\underset{x_1, x_2}{Max}\; u(x_1, x_2)$		$\underset{x_1, x_2}{Min}\; p_1x_1 + p_2x_2$
s.c. $p_1x_1 + p_2x_2 \leq R$		s.c. $u(x_1, x_2) \geq \bar{u}$
x_1^*, x_2^*, u^*	← variables endogènes →	$x_1, x_2, p_1\hat{x}_1 + p_2\hat{x}_2$
p_1, p_2, R	← variables exogènes →	p_1, p_2, $\bar{u}$

(**voir graphique 1-08**)

1- 08



$x_1^* = \xi_1(p_1, p_2, R)$	← forme des solutions →	$\hat{x}_1 = h_1(p_1, p_2, \bar{u})$
$x_2^* = \xi_2(p_1, p_2, R)$		$\hat{x}_2 = h_2(p_1, p_2, \bar{u})$
Demandes Marshalliennes		Demandes Hicksiennes

$$u^* = u(x_1^*, x_2^*)$$
$$= u[\xi_1(p_1, p_2, R), \xi_2(...)]$$
$$= v(p_1, p_2, R)$$
↑
fonction d'utilité indirecte

$$\sum p_h x_h = p_1\hat{x}_1 + p_2\hat{x}_2$$
$$= p_1h_1(p_1, p_2, \bar{u}) + p_2h_2(...)$$
$$= e(p_1, p_2, \bar{u})$$
↑
fonction de dépense

Il y a deux façons d'aborder le problème du consommateur :

- Le problème primal consiste à déterminer quel panier de biens maximisera l'utilité du consommateur compte tenu de son budget.
- Le problème dual est de déterminer quel panier de biens minimisera la dépense du consommateur pour un certain niveau d'utilité donné

1° Soit p et R donnés. On résout le problème primal :

$$\underset{x_1, x_2}{Max}\ u(x_1, x_2) \qquad \text{s.c. } p_1x_1 + p_2x_2 \leq R$$

On trouve alors $x_1^* = x_1^o$ et $x_2^* = x_2^o$

et $u^* = u(x_1^o, x_2^o) = u^o$

On considère le problème dual suivant :

$$\underset{x_1, x_2}{Min}\ p_1x_1 + p_2x_2$$

$$\text{s.c. } u(x_1, x_2) \geq u^o \qquad (\text{i.e. } \overline{u} = u^0)$$

Ceci nous donne $\hat{x}_1 = x_1^0$, $\hat{x}_2 = x_2^0$

On constate que le panier de biens qui permet au consommateur de maximiser sa satisfaction aux prix (p_1, p_2) avec le budget R est le même qui permet au consommateur de minimiser sa dépense pour atteindre le niveau de satisfaction u* aux prix (p_1, p_2).

2° Soit p et $\overline{u}$ donnés. On résout le problème dual

$$\underset{x_1, x_2}{Min}\ p_1x_1 + p_2x_2 \qquad \text{s.c. } u(x_1, x_2) \geq \overline{u}$$

On obtient $\hat{x}_1 = x_1^0$, $\hat{x}_2 = x_2^0$ et donc $R^o = p_1x_1^o + p_2x_2^o$

Si on considère le problème primal avec $R = R^o$ et les mêmes prix p_1, p_2, soit :

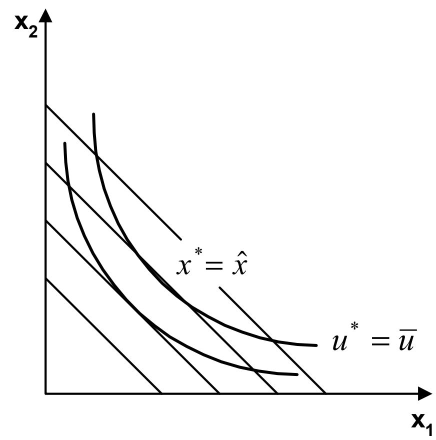
$$\underset{x_1, x_2}{Max}\, u(x_1, x_2) \qquad \text{s.c. } p_1x_1 + p_2x_2 \le R^o$$

On obtient $x_1^* = x_1^o$ et $u^* = \overline{u}$

$x_2^* = x_2^o$

(**voir graphique 1-09**)

1- 09



D'une façon générale, on a :

1. $\xi_r(p, R) \equiv h_r(p, v(p, R))$ pour tout r
2. $h_r(p, u) \equiv \xi_r(p, e(p, u))$
3. Équation de Slutsky :

$$h_r(p, u) = \xi_r(p, e(p, u))$$

$$\frac{\partial h_r}{\partial p_s} = \frac{\partial \xi_r}{\partial p_s} + \frac{\partial \xi_r}{\partial R}\frac{\partial e}{\partial p_s}$$

$$= \frac{\partial \xi_r}{\partial p_s} + \frac{\partial \xi_r}{\partial R}\, x_s^*$$

<u>Exemple 5</u>

Reprenons l'exemple où $u(x_1, x_2) = x_1x_2$ avec $p = (p_1, p_2)$ et R. Nous avons déjà résolu le problème primal $\underset{x_1, x_2}{Max}\, u(x_1, x_2) = x_1x_2$ s.c. $p_1x_1 + p_2x_2 \le R$

et nous avions trouvé les fonctions de demande Marshalliennes :

$x_1^* = R / 2p_1$ et $x_2^* = R / 2p_2$

Si R = 20, p_1=1 et p_2=2, on obtient : $x_1^o = 10$, $x_2^o = 5$ avec $u^* = u^o = 50$.

Considérons maintenant le problème dual :

$$\underset{x_1, x_2}{Min} \quad p_1x_1 + p_2x_2 \qquad \text{s.c. } u(x_1, x_2) = x_1x_2 = \overline{u}$$

Si l'on pose $L = p_1x_1 + p_2x_2 - \lambda(x_1x_2 - \overline{u})$, on obtient les conditions de premier ordre suivantes :

1. $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \lambda x_2 = 0$
2. $\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \lambda x_1 = 0$
3. $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 x_2 - \overline{u} = 0$

De (1) et (2), on tire : $\lambda = p_1/x_2 = p_2/x_1 \Rightarrow x_1 = p_2/p_1 * x_2$

Dans (3) :

$$\frac{p_2}{p_1} * x_2 * x_2 = \overline{u} \Rightarrow x_2^2 = \frac{p_1}{p_2}\overline{u}$$
$$\Rightarrow \hat{x}_2 = \sqrt{p_1/p_2\, \overline{u}}$$
$$\Rightarrow \hat{x}_1 = \frac{p_2}{p_1}\hat{x}_2 = \sqrt{p_2/p_1\, \overline{u}}$$

qui sont les fonctions de demande Hicksiennes (ou compensées).

Si l'on fixe $\overline{u} = u^o = 50$, on obtient, avec $p_1 = 1$ et $p_2 = 2$:

$\hat{x}_1 = \sqrt{100} = 10$ et $\hat{x}_2 = \sqrt{25} = 5$

Tel que prévu :
$$x_1^* = \hat{x}_1 = x_1^o = 10$$
$$x_2^* = \hat{x}_2 = x_2^o = 5$$

La fonction d'utilité indirecte :

$v(p, R) = u(x_1^*, x_2^*) = R/2p_1 * R/2p_2 = R^2/4p_1p_2$

nous permet de retrouver les demandes Marshalliennes grâce à l'identité de Roy :

$$x_1^* = \frac{\partial v / \partial p_1}{\partial v / \partial R} = \frac{R^2}{4 p_1^2 p_2} * \frac{4 p_1 p_2}{2 R} = \frac{R}{2 p_1}$$

$$x_2^* = \frac{\partial v / \partial p_2}{\partial v / \partial R} = \frac{R^2}{4 p_1 p_2^2} * \frac{4 p_1 p_2}{2 R} = \frac{R}{2 p_2}$$

La fonction de dépense :

$$e(p, \overline{u}) = p_1 \hat{x}_1 + p_2 \hat{x}_2 = p_1 \sqrt{{}^{p_2}\!/_{p_1} \overline{u}} + p_2 \sqrt{{}^{p_1}\!/_{p_2} \overline{u}} = 2 \sqrt{p_1 p_2 \overline{u}}$$